ALGEBRA M2 - Lista 4

Wartości własne i wektory własne

Zad.1. Wyznaczyć rzeczywiste wartości własne i odpowiadające im przestrzenie wektorów własnych dla macierzy

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Zad.2. Wyznaczyć zespolone wartości własne i odpowiadające im przestrzenie wektorów własnych dla macierzy

$$\begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 2 & 8 & -2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Zad.3. Dla danego przekształcenia liniowego znaleźć wartości własne i odpowiadające im wektory własne:
(a) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, gdzie $T(x, y) = (x + 2y, x - y)$
(b) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, gdzie $T(x, y, z) = (y, x, z)$
(c) $T : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$, gdzie $T(x, y, z) = (x + 2y + z, -2x + y, z)$

Zad.4. Niech $T : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_2[x]$, gdzie

$$(T(f))(x) = (x + 1)f'(x).$$

Wyznaczyć wartości własne i wektory własne tego przekształcenia.

Zad.5. Niech T będzie symetrią przestrzeni $\mathbb{R}^2$ względem prostej $y = x$. Korzystając z interpretacji geometrycznej T, odczytać jego wektory własne i wartości własne oraz napisać macierz tego przekształcenia w bazie wektorów własnych.

Zad.6. Wykazać, że liczba zero jest wartością własną macierzy A wtedy i tylko wtedy gdy macierz A jest osobliwa, tzn. $\det A = 0$.

Zad.7. Znając wartości własne macierzy $A \in M_n(\mathbb{C})$, wyznaczyć wartości własne macierzy A^2 oraz, w przypadku gdy A jest nieosobliwa, macierzy A^{-1}.

Zad.8. Zdiagonalizować macierz rzeczywistą

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 6 \\ 2 & 1 & 4 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Zad.9. Zbadać, czy istnieje postać diagonalna macierzy rzeczywistej

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Romuald Lenczewski